**Translation** of *The Cartoon Guide To Algebra & Calculus* (By Larry Gonick) : Shashidhar Jagdeeshan_**From Azim premji University At Right Angles_August, 2017**

# *गणित शिक्षण में असहनीय बोझिलता से निपटना*

## बीजगणित और केल्कुलस के लिए कार्टून गाइड : *लैरी गोनिक*

**समीक्षा : शशिधर जगदीशन**

***मुख्य शब्द :*** *चित्र, ग्राफ़िक्स, बीजगणित, कलन (calculus)*

मैं नहीं जानता कि गणित सीखने का आपका अनुभव क्या था– परन्तु मेरे लिए तो स्नातक शाला में पहुँचने से पहले और पूर्व-स्नातक स्तर पर कुछ कोर्स को छोड़कर यह बहुत बोझिल था। सबसे पहले तो 'ज्ञान' शब्द से जुड़ी दबे रहने की भावना थी। सीखने को बहुत कुछ था, याद करने को बहुत कुछ था और बहुत सारे की परीक्षा होनी थी! सीखने से जुड़े हल्केपन की कोई भावना नहीं थी, खोज करने और समझने से जुड़ी खेल या आनन्द की कोई भावना नहीं थी। मुझे याद है, एक बार मैं इन भावनाओं के साथ एक बड़े-से पुस्तकालय में घूम रहा था और वहाँ मुझे जस्टिन रिचर्डसन (Justin Richardson) की एक ख़ूबसूरत कविता (Punch, 1952) मिली, जिसे पढ़कर मुझे बहुत राहत महसूस हुई थी। वह कविता कुछ इस प्रकार थी :




*For years a secret shame destroyed my peace-*
*I'd not read Eliot, Auden or MacNeice.*
*But then I had a thought that brought me hope-*
*Neither had Chaucer, Shakespeare, Milton, Pope.*

*(बरसों तक एक गुप्त शर्मिंदगी ने मेरा चैन छीना हुआ था -*
*मैंने इलीयट, ऑडेन या मैकनीस को नहीं पढ़ा था।*
*फिर मुझे एक ख़्याल आया जिसने उम्मीद दी -*
*चौसर, शेक्सपीयर, मिल्टन और पोप ने भी तो नहीं पढ़ा था। )*

इस प्रकार का बोझ ज्ञान के किसी भी क्षेत्र से जुड़ा हो सकता है, गणित के क्षेत्र में यह कई गुना बढ़ जाता है। यह विशेषकर केल्कुलस सीखने जैसे कोर्स में लागू होता है जब उसे बिना

किसी ग्राफ़ और चित्रों के पढ़ाया जाता है। और आपसे अपेक्षा की जाती है कि ढेर सारे सूत्र याद कर लें और ढेर सारे सवाल हल कर दें, बिना यह जाने कि जो सीख रहे हैं वह क्यों सीख रहे हैं। कुछ साल पहले मेरे एक विद्यार्थी ने मुझसे शिकायत की कि उसे केल्कुलस का पूर्व-स्नातक कोर्स कराया गया और शिक्षक ने पूरे कोर्स के दौरान एक ग्राफ़ भी नहीं बनाया था!

मुझे लगता है कि गणितीय ज्ञान से हमारा सम्बन्ध और हम इसे कैसे पढ़ाते हैं, इसे बदलना होगा। हमें अपने शिक्षण में सहजता (जो गहनता का विलोम नहीं है), हास्य और खेल की भावना लाने की ज़रूरत है और साथ ही चित्रों के माध्यम से अवधारणाओं, सूत्रों और समीकरणों को जीवन्त करने की आवश्यकता है।

बीजगणित और केल्कुलस की *कार्टून गाइड्स* यही करती हैं। मैं प्रत्येक पुस्तक की विशिष्टताओं पर जाने से पहले कुछ सामान्य विशेषताएँ साझा करूँगा। लैरी गोनिक (Larry Gonick) एक जाने-पहचाने कार्टूनिस्ट हैं, जिन्होंने हार्वर्ड में गणित सीखा और पढ़ाया है। उन्होंने इतिहास से लेकर भौतिकी के कई विषयों पर कार्टून गाइड्स लिखी हैं। उपरोक्त दोनों पुस्तकें दरअसल विषय का गहन परिचय देती हैं। इसमें किसी भी प्रकार के लटके-झटके नहीं हैं। अवधारणाओं को बहुत सतर्कता से प्रस्तुत किया गया है, वास्तविक जीवन से जुड़े बहुत-से उदाहरण और चित्र दिए गए हैं तथा प्रत्येक अध्याय के अन्त में अभ्यास हैं।

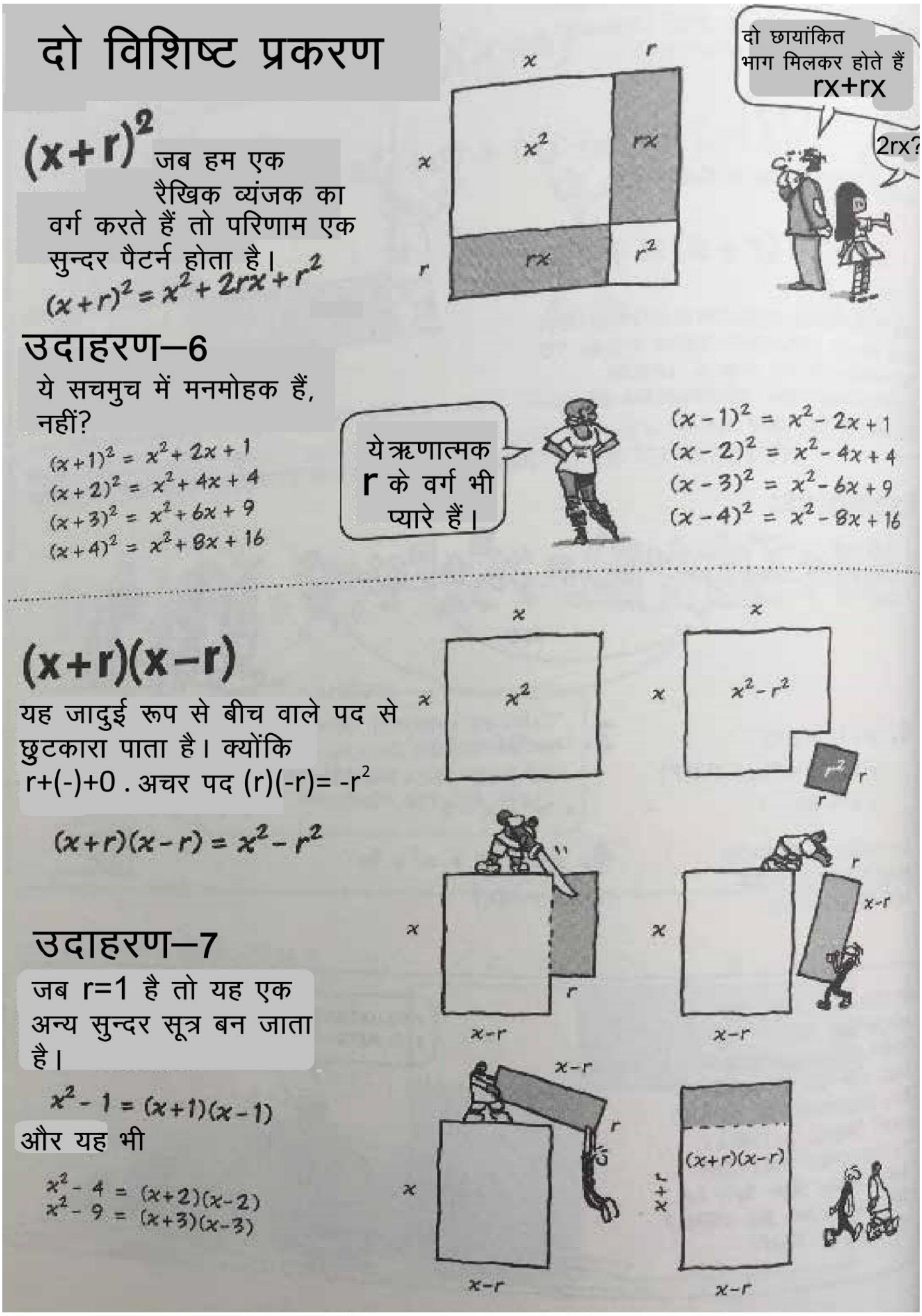
इन कार्टून गाइड्स और नियमित पाठ्यपुस्तकों के बीच क्या अन्तर है? चूँकि यह एक कार्टून पुस्तक है, इसमें व्याख्या और स्पष्टीकरण के मुख्य साधन चित्र हैं। प्रत्येक अवधारणा, वास्तव में प्रत्येक पेज चित्रों से सुसज्जित है। इनमें (**चित्र-1** देखें) चित्रांकन या चित्रों के ज़रिए प्रमाण हो सकते हैं (उदाहरण के लिए, यह दर्शाना कि $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ होता है, पूर्ण वर्ग विधि, किसी फलन और उसके व्युत्क्रम की अवधारणा, शृंखला नियम आदि का चित्रांकन)।

अवधारणाओं को समझाने और उदाहरण सहित व्याख्या करने के लिए गणितीय ग्राफ़्स के उपयोग पर ज़ोर दिया गया है। एक प्रसिद्ध कहावत को संक्षिप्त में लिख रहा हूँ, *मैं मानता हूँ कि एक ग्राफ़ एक हज़ार समीकरणों के बराबर है!* ग्राफ़ बच्चों को सहजता से यह समझने में मदद करते हैं कि कोई फलन कैसे काम करता है, क्यों कुछ परिणाम सार्थक होते हैं और ये परिणामों का अनुमान लगाने के लिए मॉडल के रूप में भी काम करते हैं [उदाहरण के लिए, माध्य मान प्रमेय (mean value theorem)]। यह सचमुच एक त्रासदी है कि शिक्षक कक्षा में इनका ज़्यादा उपयोग नहीं करते हैं।

सबसे महत्त्वपूर्ण विशेषता तो हास्य है। इनमें एक चलती हुई कथा है जिसमें कार्टून चरित्र (मानव और ग़ैर-मानव) विभिन्न अवधारणाएँ सीखते समय एक-दूसरे से बातचीत करते हैं। तो बीजगणित की पुस्तक में अल-ख़्वारिज़्मी (Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi) और भास्करा (Bhaskara II) तथा केल्कुलस की पुस्तक में न्यूटन (Isaac Newton) और लिबनिट्ज़ (Gottfried

Wilhelm Leibniz) की उपस्थिति है। गणित के इतिहास की दृष्टि से यह ताज़गी प्रदान करता है। यह और भी अच्छा होता कि केल्कुलस की पुस्तक में केरल घराने और बीजगणित की पुस्तक में उमर ख़य्याम (Omar Khayyam) के योगदान का उल्लेख किया जाता। विभिन्न पात्रों की बातचीत लगातार हास्य पैदा करती है जिसके लिए प्राय: यमक (puns) का उपयोग किया जाता है। अपेक्षा के अनुरूप, न्यूटन और लिबनिट्ज़ का लगातार आमना-सामना होता रहता है। (**चित्र-2** देखें)!

हालाँकि गोनिक के मज़ाकिया और चतुराई के अपने क्षण हैं, लेकिन मुझे कहना होगा कि मुझे कई चुटकुले 'फ़ालतू' क़िस्म के लगे! तो आप पूछ सकते हैं, फिर क्या तुक है? मुझे लगता है कि हास्य (घटिया या बढ़िया) विद्यार्थियों के साथ बातचीत को हल्का-फुल्का रखने और किसी अवधारणा को सीखने में आनन्द का पहलू लाने का एक तरीक़ा है। कभी-कभी एक घटिया चुटकुला किसी अवधारणा से जुड़ जाता है और उसे याद रखने में सहायक होता है। यहाँ उन चुटकुलों के उदाहरण दिए गए हैं जिन्हें मैं अपनी कक्षाओं में सुनाता हूँ, अक्सर मेरे विद्यार्थियों की खिलखिलाहट के बीच। उदाहरण के लिए, सम्मिश्र संख्याएँ पढ़ाते समय : एक ऋणात्मक संख्या मनोचिकित्सक के पास जाती है। मनोचिकित्सक ऋणात्मक संख्या से पूछता है, "तुम हमेशा इतनी नकारात्मक क्यों रहती हो?" ऋणात्मक संख्या जवाब देती है, "ऐसा इसलिए, क्योंकि मैं दो सम्मिश्र इकाइयों की पैदाइश हूँ!" चुटकुले का एक और उदाहरण (अनन्त गुणोत्तर श्रेणी पढ़ाते समय के लिए उपयुक्त), जो कि वास्तविकता में काफ़ी गहरा है, इस प्रकार है, गणितज्ञों की एक अनन्त संख्या एक *बार* (Bar) में जाती है। पहला आधा मग बियर ऑर्डर करता है, दूसरा एक-चौथाई, तीसरा एक-आठवाँ और इसी प्रकार आगे। *बारटेंडर* उन्हें बियर से भरा पूरा मग लाकर देता है और कहता है, "दोस्तो आप अपनी सीमा जानो!"



दो विशिष्ट प्रकरण
$(x+r)^2$ जब हम एक रैखिक व्यंजक का वर्ग करते हैं तो परिणाम एक सुन्दर पैटर्न होता है।
$(x+r)^2 = x^2 + 2rx + r^2$
x
r
$x^2$
rx
rx
$r^2$
दो छायांकित भाग मिलकर होते हैं rx+rx
2rx?
उदाहरण–6
ये सचमुच में मनमोहक हैं, नहीं?
$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$
$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$
$(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$
ये ऋणात्मक r के वर्ग भी प्यारे हैं।
$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$
$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$
$(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$
$(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$
$(x+r)(x-r)$
यह जादुई रूप से बीच वाले पद से छुटकारा पाता है। क्योंकि r+(-)+0 . अचर पद (r)(-r)= $-r^2$
$(x+r)(x-r) = x^2 - r^2$
$x^2$
$x^2 - r^2$
$r^2$
x-r
उदाहरण–7
जब r=1 है तो यह एक अन्य सुन्दर सूत्र बन जाता है।
$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$
और यह भी
$x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$
$x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$
(x+r)(x-r)
x+r


चित्र–1




चित्र–2




चित्र–3

**बीजगणित की कार्टून गाइड**

बीजगणित की कार्टून गाइड में 17 अध्याय हैं और यह एकदम बुनियादी अंकगणित से प्रारम्भ होकर द्विघात समीकरण को हल करने तक जाती है। इस यात्रा के दौरान यह प्राथमिक बीजगणित और निर्देशांक ज्यामिति की मानक अवधारणाओं पर बात करती है।

अंकगणित के माध्यम से हमें अज्ञात चर से परिचित कराया जाता है। इसके बाद हमें गणित की बुनियादी संक्रियाएँ सिखाई जाती हैं जिसमें ऋणात्मक संख्याओं के साथ काम करना, भिन्न, संख्या रेखा, अनुपात और समानुपात (ratio and proportion), व्यंजकों का परिचय, समीकरण हल करना, निर्देशांक ज्यामिति से परिचय, रैखिक और युगपत समीकरण और अन्त में द्विघात समीकरण शामिल होते हैं।

गाइड में गणित शिक्षक के लिए बहुत कुछ है। ये पुस्तकें अवधारणाओं का परिचय देने और सिखाने के बहुत-से विचार प्रस्तुत करती हैं। उदाहरण के लिए, लेखक ऋणात्मक संख्याओं और उनकी संक्रियाओं के लिए दो 'मॉडल' का उपयोग करते हैं। एक में वास्तविक संख्याओं को सरल रेखा की लम्बाई के अनुदिश कोई राशि माना जाता है और फिर नियम बनाए जाते हैं कि ये लम्बाइयाँ किस प्रकार आपस में जुड़ती हैं। दूसरे में ऋणात्मक संख्याओं को ऋण के रूप में माना जाता है। जिस तरह उन्होंने लम्बवत रेखाओं की ढलान के सम्बन्ध को चित्रांकित किया, $a^{-n} = 1/a^n$ का परिचय दिया, वह मुझे पसन्द आया। साथ ही द्विघात समीकरण के वर्गमूल की जाँच करने का तरीक़ा भी।

जिस तरीक़े से 'शून्य' की बात की गई मैं उससे बहुत ख़ुश नहीं हूँ। मुझे लगता है कि लेखक को इस अवधारणा को शून्य के गुणों के साथ एक स्थान धारक और अपने आप में एक संख्या दोनों तरह से चर्चा करने में अधिक समय बिताना था। अलबत्ता, लेखक ने चित्रों के माध्यम से यह बताया है कि क्यों शून्य से भाग देना एक अच्छा विचार नहीं है (**चित्र-3** देखें)!

जहाँ अधिकांश अध्याय मानक सामग्री पर ही बात करते हैं, दो अध्याय मुझे काफ़ी असाधारण लगे। एक का सम्बन्ध दर से है, जहाँ गोनिक 'सभी परिस्थितियों के लिए दर समीकरण' का परिचय देते हैं :

$$U = U_0 + r_U(t - t_0)$$

जहाँ U किसी समय t पर दी गई कोई मात्रा है, $U_0$ प्रारम्भिक मात्रा है, $r_U$ समय के साथ U के बदलने की दर है और $t_0$ प्रारम्भिक समय है। उन्होंने समझाया है कि किस प्रकार ऐसे समीकरण का ग्राफ़ एक सरल रेखा होगी जिसका y-अन्त:खण्ड $U_0$ और ढलान $r_U$ होगी। इसके बाद वे इस समीकरण को चाल और वेग से लेकर एक टैंक में पानी भरने और बाहर निकलने तक विभिन्न परिस्थितियों में लागू करते हैं।

दूसरा असाधारण अध्याय भारित औसत के बारे में है। हमें बिजली के औसत मासिक बिल की गणना करने का वास्तविक जीवन का उदाहरण मिलता है, जहाँ खपत की दर महीने-दर-महीने बदलती रहती है। इस अध्याय को हास्य के पुट के साथ लिखा गया है!

## केल्कुलस की कार्टून गाइड

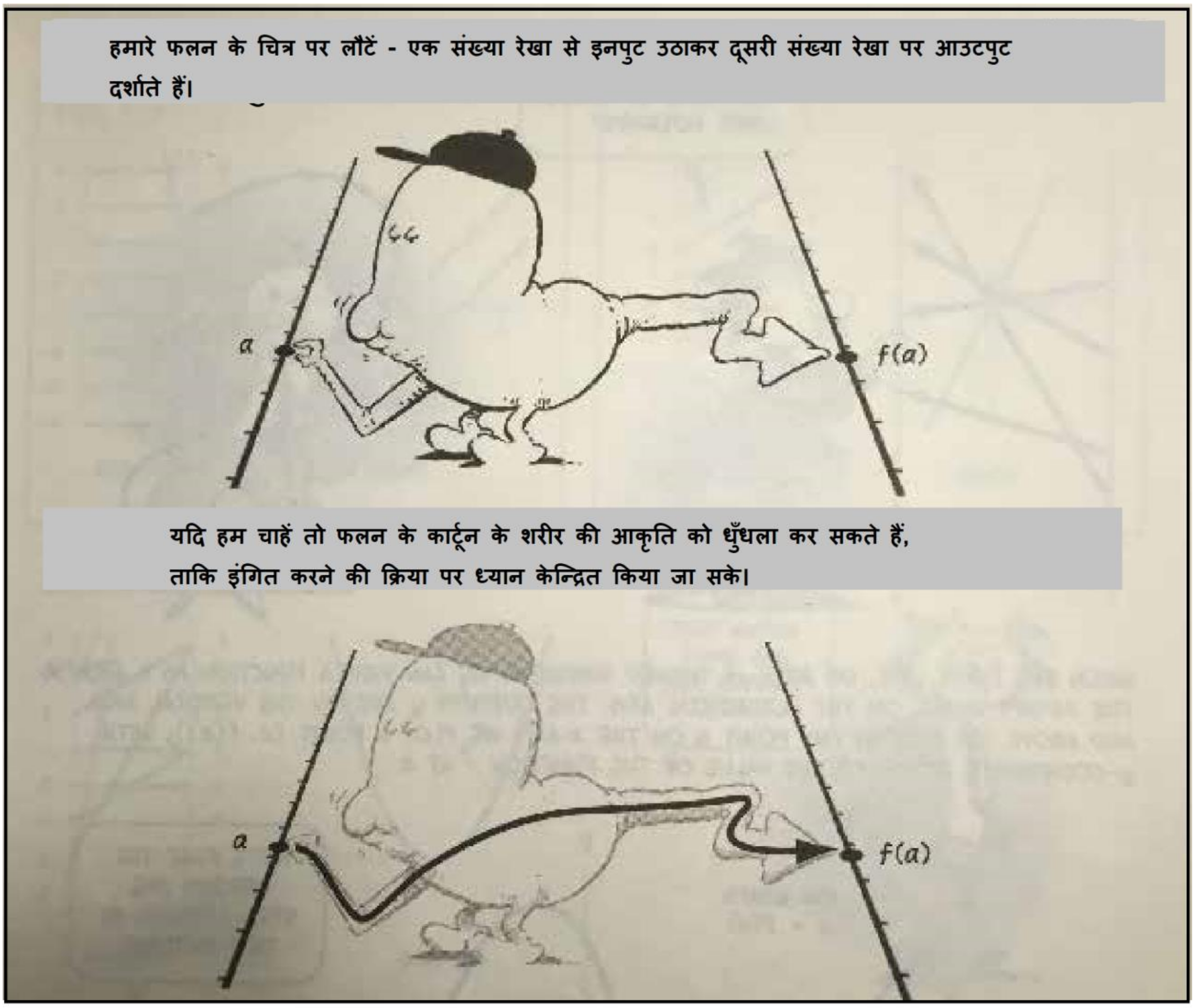
केल्कुलस की कार्टून गाइड में 14 अध्याय हैं और इसमें बुनियादी अवकलन (differential calculus) और समाकलन (integral calculus) शामिल हैं। गोनिक तात्कालिक वेग (instantaneous velocity) के विचार को समझाते हुए शुरू करते हैं और 'वेगमापी' का एक चतुर विचार जोड़ते हैं, जो है तो चालमापी की तरह है, सिवाय इसके कि यह कार की उल्टी दिशा की चाल को ऋणात्मक चिह्न देता है। वेगमापी का उपयोग करके वे यह धारणा समझा

पाते हैं कि तात्कालिक वेग का आकलन समय में परिवर्तन के साथ दूरी में हुए परिवर्तन से किया जा सकता है। इसके बाद वे 'फलन' की अवधारणा का परिचय एक जानवर के माध्यम से देते हैं जिसका एक इनपुट और एक आउटपुट है (इस प्रकार के मॉडल से जुड़े हास्य के साथ!)। उनके पास दो समान्तर रेखाओं को खींचने का एक सुन्दर विचार है (**चित्र-4** देखें), जहाँ इनपुट को एक रेखा पर और आउटपुट को दूसरी रेखा पर चिह्नित किया गया है। जानवर वह फलन है जो इन दोनों के बीच खड़ा है जिसका हाथ इनपुट की ओर तथा पूँछ आउटपुट की ओर है। इसके बाद वे हमें सभी मानक फलन का परिचय देते हैं, जिनमें से प्रत्येक के गुणधर्मों को ग्राफ़ के उपयोग से बहुत अच्छे से चित्रांकित किया गया है।

गोनिक सीमा (limits) की अवधारणा को विकसित करने में काफ़ी समय व्यतीत करते हैं और इस कठिन अवधारणा को स्पष्ट करने के लिए उनके विचारों से शिक्षक निश्चित रूप से लाभान्वित होंगे। इसके बाद वे परिवर्तन की दर के विचार का उपयोग कर अवकलज (derivative) का परिचय देते हैं। यहाँ उनका ज़ोर इस बात पर है कि केल्कुलस मुख्यत: परिवर्तन को समझने से जुड़ा है और वे इस विचार को समझाने के लिए चाल, वेग और त्वरण को मुख्य साधन के रूप में उपयोग करते हैं। पुस्तक में अवकलन के मानक अनुप्रयोग भी शामिल हैं।

एक चीज़ जिस पर गोनिक ज़्यादा समय (छिट-पुट के सिवाय) व्यतीत नहीं करते हैं, वह है कि किस प्रकार एक स्पर्श रेखा स्थानीय रूप से एक वक्र का सबसे अच्छा सन्निकटन है, और इसके परिणामत: किस प्रकार केल्कुलस वक्र खींचने में बहुत ही मददगार है। मुझे लगता है कि उन्हें क्या रखना है और क्या छोड़ना है के बीच चुनाव करना पड़ा होगा।

बीजगणित की कार्टून गाइड की तरह ही इसकी भी अधिकांश सामग्री मानक है। अनुभवी शिक्षक कई उन तकनीकों को पहचान जाएँगे जिन्हें उन्होंने भी वर्षों से अवधारणाओं को समझाने के लिए अपनाया है। हालाँकि, मैं एक बार फिर से ज़ोर देना चाहूँगा कि इसमें ऐसा बहुत कुछ है जो कठिन विषयों (जैसे केल्कुलस का बुनियादी प्रमेय) को समझाने और व्याख्या करने के लिए कोई भी सीख सकता है। केल्कुलस की कार्टून गाइड में 'शृंखला नियम' को जिस प्रकार समझाया गया है, वह मुझे हटकर लगा। उन्होंने दो नए विचार प्रस्तुत किए हैं। इन विचारों को समझाने के लिए हमें कुछ चिह्नों की आवश्यकता है।




चित्र-4

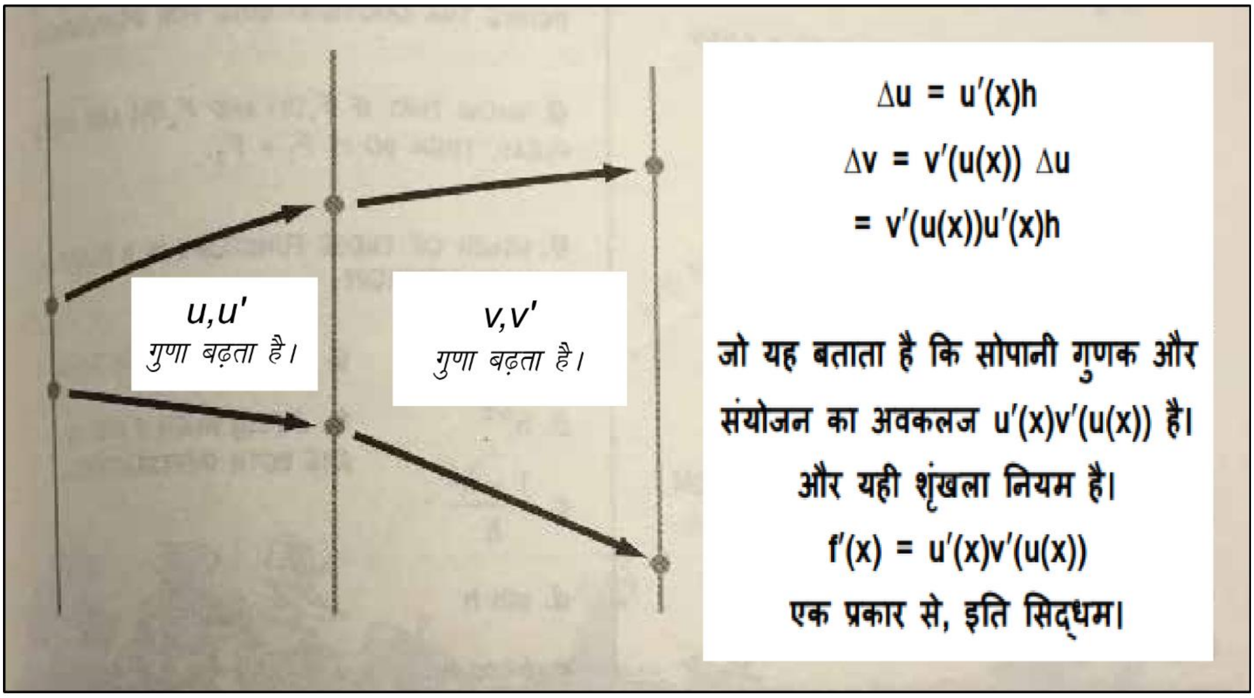
माना कि f(x) एक सतत फलन है, इसका अवकलज f'(x) है। हमेशा की तरह h एक शून्येतर वास्तविक संख्या है और Δf = f(x+h) - f(x) है। गोनिक अपने अक्खड़ तरीक़े से 'पिस्सु (Flea)' नाम से गणितीय राशि परिभाषित करते हैं जो निम्न को सन्तुष्ट करती है :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\text{Flea}}{h} = 0.$$

वे दर्शाते हैं कि Δf/h सोपनी गुणक है, जिसे h से गुणा करने पर Δf मिलता है। वे आगे जाकर एक समीकरण की व्युत्पत्ति करते हैं जिसे वे केल्कुलस का बुनियादी समीकरण कहते हैं,

$$\Delta f = hf'(x) + \text{Flea}$$

इस समीकरण और Flea की परिभाषा से हम सोपानी गुणक Δf/h को f'(x) से बदल सकते हैं।




**चित्र-5**

सोपानी गुणक का विचार अब हमें श्रृंखला नियम और $f^{-1}(x)$ दोनों को f(x) के पदों में समझने में मदद करता है। (**चित्र-5** देखें।)

यह पुस्तक समाकलन पर तो बात करती है, परन्तु इसका अधिकांश भाग केल्कुलस-पूर्व की बुनियादी अवधारणा के परिचय और अवकलन को समर्पित है।

## अन्तिम टीप

स्पष्ट है कि कार्टून गाइड विषयों की पाठ्यपुस्तकों की जगह नहीं ले सकती हैं। मुझे लगता है कि वे बहुत अच्छी सहायक सामग्री का काम करती हैं। वे शिक्षक और विद्यार्थी के लिए अलग-अलग उद्देश्यों की पूर्ति करती हैं। जैसा कि मैंने पहले बताया, शिक्षकों को अवधारणाओं का परिचय देने, कक्षा में उपयोग किए जा सकने वाले चित्रों, अपने शिक्षण को बेहतर बनाने के विचारों के अलावा शायद ऐसे उदाहरण और सवाल भी मिलेंगे जिनका उपयोग कक्षा में किया जा सकता है।

बीजगणित या केल्कुलस कोर्स के विद्यार्थियों के लिए, मैं चुनिन्दा सामग्री का ही उपयोग करूँगा। सामग्री पूरी हो जाने के बाद शायद उन्हें किन्हीं विशिष्ट अध्यायों को पढ़ने के लिए कहूँगा। ये पुस्तकें न केवल उनके चेहरों पर मुस्कराहट लाएँगी, बल्कि इसका चित्र-आधारित नज़रिया सहज और औपचारिक दोनों समझ को मज़बूत बनाएगा। एक बार विषयवस्तु सीख लेने के बाद, ये पुस्तकें निश्चित रूप से अवधारणाओं के सुदृढ़ीकरण के लिए उत्कृष्ट संसाधनों के रूप में कार्य करेंगी। यदि वे उच्च गणित सीखने का निर्णय लेते हैं, तो उन्हें दोनों पुस्तकों के अन्तिम अध्याय पढ़ने में मज़ा आएगा, जो उन अधिक उन्नत विषयों का पूर्वावलोकन देते हैं, जिनसे वे रू-ब-रू होंगे।

मैं अनुशंसा करता हूँ कि स्कूल पुस्तकालय में ये पुस्तकें होनी चाहिए। ख़त्म करने से पहले, मैं पाठकों को चेतावनी देना चाहूँगा, हालाँकि पुस्तकें हास्य और वाकपटुता के साथ लिखी गई हैं और इनमें मनोरंजक चित्र भी हैं, परन्तु यह चलते-फिरते पढ़ी जाने वाली पुस्तकें नहीं है। गणित के साथ अत्यन्त गहन तरीक़े से और सावधानीपूर्वक कार्य किया गया है, इसलिए सीखने और मुस्कराने के लिए तैयार रहें, केवल मनोरंजन के लिए नहीं।

Reference:


1. Gonick, Larry. The Cartoon Guide to Algebra. William Murrow, 2015.
2. Gonick, Larry. The Cartoon Guide to Calculus. William Murrow, 2012.


........................................................................................................................


**शशिधर जगदीशन** ने वर्ष 1994 में सिरेक्यूज़ से अपनी पीएचडी की थी। वे गणित शिक्षक हैं। उनका मानना है कि गणित एक मानवीय उद्यम है। उनकी रुचि विद्यार्थियों को गणित की सुन्दरता का अहसास दिलाने और ऐसा माहौल देने में है जहाँ बच्चे सीखने का मज़ा ले सकें। उनसे jshashidhar@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।



**अनुवाद :** संजय गुलाटी **अनुवाद पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर :** अभिषेक दुबे (सभी एकलव्य फ़ाउण्डेशन) **सम्पादन :** राजेश उत्साही